# §8. Частные производные и дифференциалы высших порядков

# П.1. Формула Тейлора

Производная второго порядка функции двух переменных есть . Аналогично определяется производная – го порядка . Точно таким же образом определяется дифференциал – го порядка функции . По определению это есть , где . Пусть есть некая функция от двух переменных . Тогда . Дифференциал зависит от четырех переменных – точки , от последних двух зависит линейно. Тогда дифференциал второго порядка есть . Таким образом, дифференциал второго порядка есть , а дифференциал – го порядка есть . Рассмотрим функцию , у которой существуют частные производные – го порядка в окрестности точки в окрестности точки . Тогда имеет место выражение , где , которое и называется формулой Тейлора. Пояснение: – бесконечно малая функция, а – бесконечно большая более высокого порядка, остаточный член формулы Тейлора. Аналогичная формула для одной переменной была в первом семестре.

# П.2. Экстремум функции нескольких переменных

Пусть некая функция определена в окрестности точки и имеет частные производные 1-го порядка. Говорят, что функция имеет локальный максимум в точке , если существует такая окрестность точки , что для любого и этой окрестности выполняется неравенство . Аналогичным образом определяется локальный минимум. Точки локального минимума и максимума называются точками экстремума.

**Теорема 24.** Пусть точка – точка экстремума. Тогда частные производные (если они существуют) и равны нулю.

**Доказательство.** Пусть точка – точка максимума (аналогичные рассуждения можно вести для точки минимума) функции . Тогда по определению существует такая окрестность точки , что . Так как фиксировано, то это функция одной переменной, и, следовательно, частная производная по обращается в ноль . Это является необходимым условием существования экстремума для функции одной переменной (также существование производной в этой точке). Аналогичным образом частная производная по обращается в ноль . Точки, в которых производная обращается в ноль, называются стационарными точками.

**Замечание.** Обращение частных производных в ноль является необходимым, но не достаточным условием существования точки экстремума. Пример: . Точка не принимает экстермальное значение, хотя частные производные в этой точке равны нулю .

**Теорема 25.** Достаточные условия экстремума. Пусть некая функция имеет частные производные до второго порядка включительно в окрестности точки . Пусть . Если:

1. и , то точка – точка минимума.
2. и , то точка – точка максимума.
3. , то точка не является точкой экстремума.
4. , то требуется дополнительное исследование.

Доказательство теоремы в следующей лекции.